

水平条形均布荷载下横观各向同性 弹性地基的位移分析

金耀华, 孙 炎, 钱玉林

(扬州大学 建筑科学与工程学院, 江苏 扬州 225009)

摘 要: 分析了水平条形均布荷载下横观各向同性地基位移规律, 归纳了位移随弹性模量比 n 之不同而变化的规律, 提出了水平条形均布荷载下横观各向同性地基位移的近似简化解, 以供岩土工程设计人员参考。

关 键 词: 横观各向同性地基; 位移解; 近似解

中图分类号: TU 471

文献标识码: A

Analysis of displacements of transversely isotropic foundation under level strip uniformly distributed load

JIN Yao-hua, SUN Yan, QIAN Yu-lin

(Architectural Science and Civil Engineering College, Yangzhou University, Yangzhou 225009, China)

Abstract: The displacement of transversely isotropic foundation under the level strip uniformly distributed load are analyzed. The rules of displacement with the different ratios of modulus of elasticity are drawn. The approximate solution for displacements of transversely isotropic foundation under the level strip uniformly distributed load is proposed.

Key words: transversely isotropic foundation; displacement solution; approximate solution

1 引 言

横观各向同性现象在地质材料中比较常见, 如在沉积过程中形成的层状结构粘土层、页岩等。由于在不同薄层内的矿物成分及物理力学性质是不同的, 在水平方向可以近似地看成各向同性, 但在垂直方向的物理力学性质差异就比较大。所以类似这样沉积形成的天然地基, 其应力、应变关系比较适合采用横观各向同性地基模型来描述。前人对横观各向同性地基已做了一些研究^[1~3]。在目前工程设计计算中, 使用的水平条形均布荷载下地基位移公式仍然是在假定地基是均质、各向同性的弹性半空间条件下导得的。本文考虑了地基的各向异性性质, 分析了水平条形均布荷载下横观各向同性地基位移变化规律。

2 横观各向同性地基在水平线荷载下的位移解析解

在地表面无限长直线上, 作用单位水平均布线荷载, 求在地基中任意点处引起的位移。该问题在经典的弹性力学中的求解是把地基假设成各向同性的。但实际上在许多情况下把地基当成横观各向同性体更符合实际, 如图 1 所示。

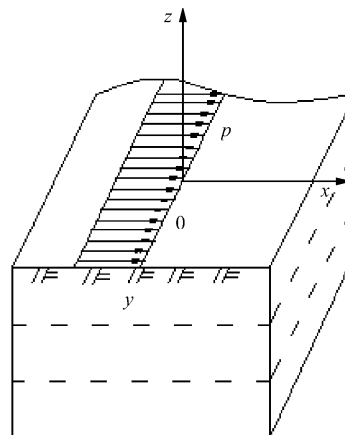


图 1 水平线荷载下的横观各向同性地基

164
Fig.1 Transversely isotropic foundation under the level linear load

由于平衡微分方程、几何方程同研究对象的材料性质无关, 所以该问题中的平衡方程、几何方程与同性体的相同, 而该问题的条件为 $\sigma_z = 0$,

$$T_{zx} = \delta(x), z=0 \text{ 其中, } \delta(x) = \begin{cases} \infty, & x=0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}.$$

对于平面应变问题, 横观各向同性物理方程式为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_H} (1 - \nu_{HH}^2) \sigma_x - \frac{1}{E_V} (1 + \nu_{HH}) \nu_{HV} \sigma_z; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_H} (1 + \nu_{HH}^2) \nu_{HV} \sigma_x + \frac{1}{E_V} \left(1 - \frac{E_H}{E_V} \nu_{HV}^2 \right) \sigma_z; \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G_{VH}} T_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 E_H, ν_{HH} 分别为 xoy 平面内的弹性模量和泊松比; E_{HV}, ν_{HV} 分别为 z 方向弹性模量和泊松比; G_{VH} 为竖直面 (z 方向) 内当竖直向与水平向成对受剪时的剪切弹性模量。

乔世范等^[4]根据上述横观各向同性体的基本方程, 运用应力函数, 傅立叶变换和傅立叶逆变换, 得出横观各向同性地基在水平集中荷载作用下的基本位移解:

$$\left. \begin{aligned} u(x, z) &= [B_1 G(x, \alpha_1 z) - B_2 G(x, \alpha_2 z) + m_1]; \\ w(x, z) &= [-C_1 G_0(x, \alpha_1 z) + C_2 G_0(x, \alpha_2 z) + m_2] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 m_1, m_2 为常数, 可根据约束条件来确定。

$$\left. \begin{aligned} B_i &= \left[\frac{\alpha_i}{E_H} (1 - \nu_{HH}^2) + \frac{(1 + \nu_{HH}) \nu_{HV}}{\alpha_i E_V} \right] \frac{\alpha_i}{\alpha_1 - \alpha_2}; \\ C_i &= \left[\frac{\alpha_i^2}{E_H} (1 - \nu_{HH}^2) + \frac{1}{E_V} (1 + \nu_{HH}) \nu_{HV} - \frac{1}{G_{VH}} \right] \frac{\alpha_i}{\alpha_1 - \alpha_2}; \\ G(x, \alpha_i z) &= -\frac{1}{2\pi} \ln [x^2 + (\alpha_i z)^2]; \\ G_0(x, \alpha_i z) &= -\frac{1}{\pi} a \tan \left(\frac{x}{\alpha_i z} \right), i = 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 α_1, α_2 为下面特征方程的 2 个正实数根:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_H} (1 - \nu_{HH}^2) \alpha^4 - \left[\frac{1}{G_{VH}} - \frac{2}{E_V} (1 + \nu_{HH}) \nu_{HV} \right] \alpha^2 + \\ \frac{1}{E_V} \left(1 - \frac{E_H \nu_{HV}^2}{E_V} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{若令 } E_H = E_V = E, \nu_{HH} = \nu_{HV} = \nu, G_{VH} = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

则式(2)变为

$$\left. \begin{aligned} u &= \left[-\frac{1-\nu^2}{\pi E} \ln(x^2 + z^2) + m_1 \right]; \\ w &= \left[\frac{2}{\pi E} (1-\nu^2) \arctan \frac{x}{z} + m_2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

这与水平集中力作用下的各向同性半无限体中的位移的解析解相吻合, 这证明了式(2)的正确性。

3 水平条形均布荷载下横观各向同性地基的位移公式

一般情况下, 公路、铁路及条形基础受倾斜荷载作用时, 其水平荷载分量在横观各向同性地基的引起的位移被称为横观各向同性地基在边界上的条形面积受水平分布力的平面应变问题。

若条形荷载是均布荷载, 建立如图 2 所示的坐标系, 假定条形面积的宽度为 $2a$, 水平均布荷载的集度为 p , 则地基中任一点的位移可由式(2)在区间 $[-a, a]$ 上积分得到:

$$\left. \begin{aligned} U(x, z) &= \int_{-a}^a p u(x-t, z) dt; \\ W(x, z) &= \int_{-a}^a p w(x-t, z) dt \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

利用 MATLAB 积分符号工具箱可以求得式(7)的解析解, 对运行结果整理后可得:

$$\begin{aligned} U(x, z) &= \frac{p B_1}{2\pi} \left\{ (x-\alpha) \ln[(x-\alpha)^2 + \alpha_1^2 z^2] - \right. \\ &\quad (x+\alpha) \ln[(x+\alpha)^2 + \alpha_1^2 z^2] + \\ &\quad \left. 2\alpha_1 z \left(a \tan \frac{x-a}{\alpha_1 z} - a \tan \frac{x+a}{\alpha_1 z} \right) \right\} - \\ &\quad \frac{p B_1}{2\pi} \left\{ (x-a) \ln[(x-a)^2 + \alpha_2^2 z^2] - \right. \\ &\quad (x+a) \ln[(x+a)^2 + \alpha_2^2 z^2] + \\ &\quad \left. 2\alpha_2 z \left(a \tan \frac{x-a}{\alpha_2 z} - a \tan \frac{x+a}{\alpha_2 z} \right) \right\} + m_1 \quad (7) \end{aligned}$$

$$W(x, z) = -\frac{p C_1}{\pi} \left[(x-a) a \tan \frac{x-a}{\alpha_1 z} - (x+a) \right.$$

$$\left. a \tan \frac{x+a}{\alpha_1 z} - \ln \frac{\alpha_1^2 z^2 + (x-a)^2}{\alpha_1^2 z^2 + (x+a)^2} \right] +$$

$$\frac{p C_2}{\pi} \left[(x-a) a \tan \frac{x-a}{\alpha_2 z} - (x+a) a \tan \frac{x+a}{\alpha_2 z} - \right.$$

$$\left. \frac{\alpha_2 z}{2} \ln \frac{\alpha_1^2 z^2 + (x-a)^2}{\alpha_2^2 z^2 (x+a)^2} \right] + m_2$$

(8)

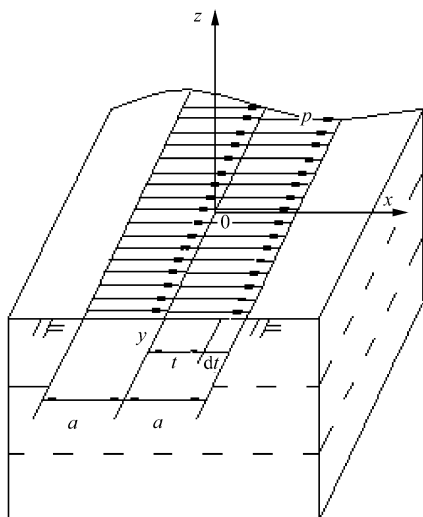


图2 水平条形均布荷载下的横观各向同性地基

Fig.2 Transversely Isotropic foundation under the level strip uniformly distributed load

4 水平条形均布荷载下横观各向同性地基位移分析

4.1 水平条形均布荷载下横观各向同性地基与各向同性地基的相对位移比较

由上述可知，水平荷载下横观各向同性弹性地基的位移解析解中有一个未知数，这需要根据约束条件进一步确定。但对于地基来说，确定其约束条件极其复杂。岩土工程中，一般只需求地基表面的相对位移，即满足工程需要。

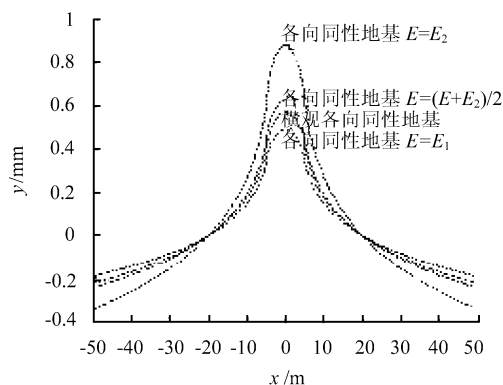
由于本文讨论的是水平荷载下引起的位移，它对竖直位移影响不大，故只讨论水平相对位移。在自由边界上任选一个基点 A ，它距荷载作用线水平距离为 x_1 ，即 A 点的坐标为 $(x_1, 0, 0)$ 。假设荷载 $P=1 \text{ kN/m}$ ，根据上面的位移公式，相对于 A 点的水平条形均布荷载下横观各向同性地基的相对水平位移公式：

$$\eta = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)(1 - v_{HH}^2)}{2\pi E_H} \left[(x-a) \ln(x-a)^2 - (x_1-a) \ln(x_1-a)^2 - (x+a) \ln(x+a)^2 + (x_1+a) \ln(x_1+a)^2 \right] \quad (9)$$

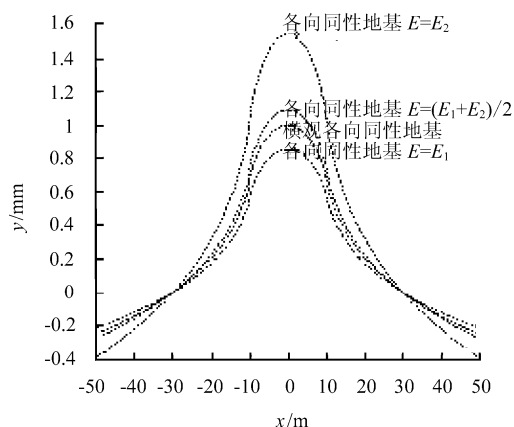
各向同性地基的相对水平位移公式为

$$\eta = \frac{1-v^2}{\pi E} \left[(x-a) \ln(x-a)^2 - (x_1-a) \ln(x_1-a)^2 - (x+a) \ln(x+a)^2 + (x_1+a) \ln(x_1+a)^2 \right] \quad (10)$$

由图 3 可知：(1) 在水平条形均布荷载下横观各向同性地基与各向同性地基的相对位移变化趋势相一致，且在荷载作用线附近，其相对位移最大。



(a)



(b)

图3 η 随 x 的变化Fig.3 The change of η followed x

(2) 各向同性地基 $E=E_2$ 时的相对位移最大， $E=E_1$ 时的相对位移最小。横观各向同性地基的相对位移介于二者之间。

4.2 弹性模量比 n 对 η 的影响

特征方程式(4)包含了横观各向同性地基的全部 5 个独立的基本弹性参量，根据基本弹性参数间的互换关系：

$$\frac{1}{G_{SS}} = \frac{1+v_{HV}}{E_H} + \frac{1+v_{VH}}{E_V} \quad (11)$$

把式(4)中各侧膨胀系数的二次项均取作为 0，则式(4)变为

$$\alpha^4 - \left[(n+1+2v_{HV}) \frac{G_{SS}}{G_{VH}} - 2v_{HV} \right] \alpha^2 + n = 0 \quad (12)$$

式中 G_{SS} 为竖直面内当两 S 面成对受剪时的剪切弹性模量。一般来说, $G_{VH} \neq G_{SS}$ 。二者间的差别取决于土层材料的性质。但在平面应力条件下, G_{SS} 与 G_{VH} 相差不大, 可以引进 Brdend^[5] 假定, 即假定 $G_{VH} = G_{SS}$ 。对式 (4) 简化成包含唯一参量 n 的方程:

$$\alpha^4 - (n+1)\alpha^2 + n = (\alpha^2 - n)(\alpha^2 - 1) = 0 \quad (13)$$

由此求得 α 的 2 个正实根的近似解: $\alpha_1 = \sqrt{n}$, $\alpha_2 = 1$ 。这表明, 对于特征方程(4)来说, 5 个基本弹性参量中, 起主导作用的是弹性模量比即膨胀系数比 $n \left(\eta = \frac{E_H}{E_V} = \frac{v_{HV}}{v_{VH}} \right)$, 其它参量的影响较小。将 $\alpha_1 = \sqrt{n}$, $\alpha_2 = 1$ 代入式(9), 可得:

$$\eta = \frac{(\sqrt{n}+1)(1-v_{HH}^2)}{2\pi n E_V} \left[(x-a) \ln(x-a)^2 - (x_1-a) \ln(x_1-a)^2 - (x+a) \ln(x+a)^2 + (x_1+a) \ln(x_1+a)^2 \right] \quad (14)$$

当 $n=1$, 上式变为

$$\eta = \frac{(1-v_{HH}^2)}{\pi E_V} \left[(x-a) \ln(x-a)^2 - (x_1-a) \ln(x_1-a)^2 - (x+a) \ln(x+a)^2 + (x_1+a) \ln(x_1+a)^2 \right] \quad (15)$$

考虑到 v_{HH} , v_{HV} 的平方较小且相差不大。可令 $1-v_{HH}^2 = 1-v_{HV}^2$, 此时, 式(14)就是各向同性地基的相对水平位移公式 (一般工程中各向同性地基取竖直向的弹性参数, 即取 $E = E_V$, $v = v_{HV}$)。

同样, 采用上节的弹性参数, 保持其它参量数值不变, 通过取不同的 E_H 得到不同的 n , 现分别取 $n = 1/2, 3/4, 1, 9/5, 5/2$ 。

由图 4 可知: (1) η 与 n 成反比, η 随 n 的增大而减小。(2) 与各向同性地基 ($n=1$ 对应的曲线) 相比, 横观各向同性地基当 $n < 1$ 时, η 在分布上呈现集中现象 (通常多表现在砂土层中); 而当 $n > 1$ 时, 则呈现扩散现象 (通常多表现于超固结粘性土层中)。

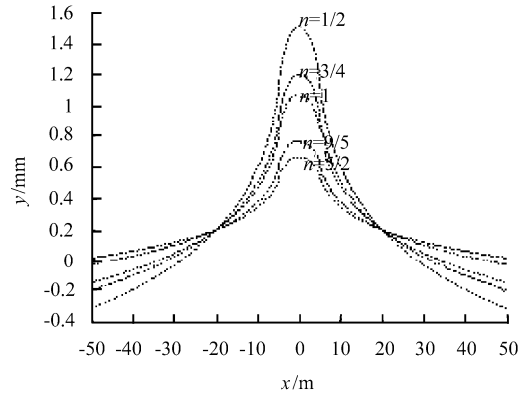


图 4 η 随 n 的变化

Fig.4 The change of η followed n

4.3 η 的近似解

在相同荷载情况下, 横观各向同性地基与各向同性地基的相对位移在数值上相差倍数为

$$K = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)(1-v_{HH}^2)E}{2E_H(1-v^2)} \quad (16)$$

若代入 $\alpha_1 + \alpha_2 = \sqrt{n} + 1$, $E = E_V$, $v = v_{HV}$, 并忽略各向泊松比的二次项, 可得到 K 的近似值:

$$K' = \frac{\sqrt{n}+1}{2n}。这表明, 横观各向同性地基的相对位移可以通过各向同性地基的相对位移乘上一个常数加以修正得到, 并且这个常数只与 n 有关, 不必另行计算。即:$$

$$\eta \approx K' \eta' \quad (17)$$

式中 $K' = \frac{\sqrt{n}+1}{2n}$; η' 为各向同性地基相对位移。

由此可知, 对于 η 的近似程度取决于 K' 的近似程度。现采用上海几组代表性地基的弹性参数对 K' 的近似程度进行计算分析 (表 1、表 2)。

表 1 横观各向同性地基的弹性参数
Table 1 The elastic parameters of transversely isotropic foundation

组数	E_H /MPa	v_{HH}	E_V /MPa	v_{HV}	G_{VH} /MPa
I	30.5	0.139	16.8	0.146	8.92
II	28.4	0.139	18.6	0.146	7.93
III	4.5	0.35	6.1	0.35	1.1
IV	6.6	0.35	7.8	0.35	2.1

表 2 K 与 K' 的相对误差
Table 2 The error of K and K'

参数	组数			
	I (粘土)	II (粘土)	III (砂土)	IV (砂土)
n	1.82	1.53	0.740	0.84
K	0.649 5	0.775 7	1.606 3	1.257 6
K'	0.646 5	0.732 1	1.259 9	1.134 5
相对误差/%	0.46	5.62	21.56	9.79

由表 2 可知：当地基土质为粘土时， K 相对误差较小，能满足工程需要；而当为砂土时，相对误差就较大。这主要原因是砂土的各向泊松比相对较大。实际上，当土层的 G_{vh} 与 G_{ss} 差别越小，而且当各泊松比比 1 小得越多时，式(17)的近似程度就越好，反之则差。

5 结 语

水平条形均布荷载下横观各向同性弹性地基位移解析解中所需的 2 个重要参数 α_1, α_2 是特征方程(4)的 2 个正实根，它们依赖于横观各向同性弹性地基全部 5 个独立参数，而其中起主导作用的是作为弹性模量比的 n 值。据此，本文提出了水平条形均

布荷载下部基本弹性参量横观各向同性弹性地基相对位移的近似解式(17)，从而使在水平条形均布荷载下弹性地基相对位移计算中简便地计入地基各向异性效应。

参 考 文 献

[1] Chen W T. On some problems in Transversely Isotropic Elastic materials[J]. *Journal of Applied Mechanics*,1996, 33: 370 - 377.

[2] Chen W T. Axisymmetric stress field around spherical inclusions and cavities in a transversely isotropic material[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1968, 35(4): 770 - 773.

[3] Birman V . On three dimensional state of thermal stress in a transversely isotropic plate with a circular hole[J]. *International Journal of Science in Engineering*, 1995, 33(1): 95 - 104.

[4] 乔世范, 顿志林, 刘宝琛. 水平荷载下横观各向同性地基中位移计算[J]. *力学与实践*, 2003, 25(5): 47 - 58.

[5] Barden L. Stress and displacements in a cross-anisotropic soil[J]. *Geotechnique*, 1963, 13(3): 113 - 118.

国家重点基础研究发展规划项目 973 介绍

灾害环境下重大工程安全性的基础研究

科技部于 2002 年 12 月 25 日正式批复国家重点基础研究发展规划项目《灾害环境下重大工程安全性的基础研究》(2002CB412700) 立项启动，谢和平、冯夏庭为项目首席科学家，中国科学院、教育部为项目依托部门。2002 年 12 月 27 日下午，首席科学家谢和平院士与冯夏庭教授参加了科技部在北京举行的 973 计划 2002 年度项目实施启动会，标志这一项目的正式启动。

该项目将针对我国西部开发中大量基础设施建设的迫切需要，通过地学、力学、工程科学相结合的系统研究，在灾害环境作用下重大工程安全性研究方面取得突破性进展。建立灾害时空预测及其对重大工程安全性影响的理论与方法，为未来我国重大岩土工程在灾害环境下的安全性与稳定性评估、设计及防灾减灾提供可靠的理论基础、控制方法和技术支持平台；解决重大工程安全性与稳定性分析中的多场耦合理论、工程尺度下地质构造精细结构探测、工程安全性分析中的能量分析方法等关键科学问题；对我国国民经济的发展起到的重大促进作用同时，推动工程学、地质学、力学、岩土工程等多学科的发展与交叉，使我国在灾害环境重大工程建设的安全性研究达到世界先进水平。该项目将以应用为目标，以机理、新理论新方法研究为核心，组织地学家、力学家、资源、信息、工程等领域的应用科学家进行跨部门跨学科的协作攻关，力求在灾害环境作用下重大工程安全性研究方面取得突破性进展，并培养一大批重大工程安全基础研究的青年人才，建设我国重大工程安全性基础研究基地。

该项目参加单位有中国科学院武汉岩土力学研究所、中国矿业大学、中国科学院地质与地球物理研究所、中国科学院力学研究所、中国科学院寒区旱区环境与工程研究所、国家地震局地球物理研究所、清华大学、河海大学、上海交通大学、黄河水利委员会勘测设计研究院等。